



Oral ENSSAT 2010

Mathématiques

Planche 4 - MP/PC/PSI

30 minutes de préparation, 25 minutes de présentation. Le candidat traitera obligatoirement les deux parties, dans l'ordre de son choix. Documents et calculatrice interdits.

Partie 1

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Étudier la nature des séries $\sum \frac{(\ln n)^{2010}}{n^\alpha}$ et $\sum \frac{1}{n \ln n}$.

Partie 2

Soit E un \mathbb{R} -ev de dimension $n \geq 2$ et soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose qu'il existe un vecteur x_0 de E tel que $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ soit une base de E .

Soit $g \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $f \circ g = g \circ f$ si et seulement si il existe un polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ tel que $g = P(f)$.

Indications et conseils.

Partie 1 : Pour la première série, comparaison à une série de Riemann (par croissance comparée). Pour la deuxième, comparaison à une intégrale qui se laisse calculer.

Partie 2 : Pour le sens direct, raisonner par analyse et synthèse : $g(x_0)$ s'écrit sur la base de l'énoncé, ce qui permet de construire un polynôme « candidat », puis on utilise le fait que deux endomorphismes sont égaux s'ils coïncident sur une base.