



Oral ENSSAT 2012

Mathématiques - Planche test

MP/PC/PSI

30 minutes de préparation, 25 minutes de présentation. Le candidat traitera obligatoirement les deux parties, dans l'ordre de son choix. Documents et calculatrice interdits.

Partie 1.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(t) = \frac{1}{1 + \cos^2(t)}$.

On note $S_n(f)$ la somme partielle au rang n de la série de Fourier associée à f , dont on rappelle l'expression :

$$S_n(f)(t) = a_0(f) + \sum_{k=1}^n [a_k(f) \cos(k\omega t) + b_k(f) \sin(k\omega t)]$$

1. Montrer que f est π -périodique. On pose alors $\omega = 2$.
Rappeler l'expression des coefficients de Fourier de f .
2. À l'aide du changement de variables $u = \tan t$, montrer que $a_0(f) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.
En déduire directement la valeur de $a_1(f)$.
3. Vérifier la relation :

$$\forall n \geq 2, a_{n+1}(f) + 6a_n(f) + a_{n-1}(f) = 0$$

On cherchera à exprimer $\cos(2(n+1)t) + \cos(2(n-1)t)$ en fonction de $\cos(nt)$.

4. En déduire le développement en série de Fourier de f .

Partie 2.

Soit u l'application définie sur $\mathbb{C}_n[X]$ par $u(P) = X^n P\left(\frac{1}{X}\right)$.

1. Vérifier que u est un endomorphisme de $\mathbb{C}_n[X]$.
2. Calculer $u \circ u$. L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?