ENSSAT

LANNION

Oral ENSSAT 2012

Mathématiques – MLRa 11

MP/PC/PSI

30 minutes de préparation, 25 minutes de présentation. Le candidat traitera obligatoirement les deux parties, dans l'ordre de son choix. Documents et calculatrice interdits.

Partie 1

Dans l'espace vectoriel $E=\mathbf{R}_2[X]$, on pose : $\forall(P,Q)\in E^2, \varphi(P,Q)=\sum_{k=0}^{2}P^{(k)}(0)Q^{(k)}(0)$.

1. Justifier rapidement que φ est un produit scalaire sur E.
2. Soit F le sous-espace vectoriel engendré par les polynômes $P_1=X^2+1$ et $P_2=X^2+X-2$. Déterminer l'orthogonal de F.
3. Calculer le projeté orthogonal de X sur F.

Partie 2

On pose : $F(x)=\int_x^{3x}\frac{\cos(2t)}{t}\,dt$.

1. Justifier que F est définie sur $\mathbf{R}^*$.
2. Montrer que, pour tout réel x non nul, $F(x)$ peut s'écrire comme somme d'une série entière.
3. Montrer que F est prolongeable en une fonction de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$.
4. A l'aide d'une intégration par parties, étudier la limite de $F(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

Indications

Partie 1

1. Vérification sans problème des axiomes de définition
2. $P = a + bX + cX^2$ est dans l'orthogonal de F si et seulement s'il est orthogonal à P_1 et à P_2, d'où : $F^{\perp} = vect\left(X^2 - 12X - 4\right) = vect(P_3)$.
3. On calcule d'abord le projeté de X sur $F^{\perp}$: $p_{F^{\perp}}(X) = \dfrac{1}{\|P_3\|^2}\varphi\left(X, P_3\right)P_3 = -\dfrac{3}{41}P_3$.

On en déduit : $p_F(X) = X - p_{F^{\perp}}(X) = \dfrac{1}{41}\left(3X^2 + 5X - 12\right)$.

Partie 2

1. $F(x)$ est l'intégrale d'une fonction continue sur un segment
2. Pour t non nul : $\dfrac{\cos(2t)}{t} = \dfrac{1}{t} + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{2^{2n}t^{2n-1}}{(2n)!}$. On pose : $g(t) = \dfrac{\cos(2t) - 1}{t}$. g est donc développable en série entière sur **R**. On peut donc l'intégrer terme à terme sur le segment $[x, 3x]$: $\displaystyle\int_x^{3x}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{2^{2n}t^{2n-1}}{(2n)!}dt = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{2^{2n}(3^{2n}-1)}{(2n)!2n}x^{2n}$.

Ainsi : $\forall x \neq 0, F(x) = \ln 3 + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{2^{2n}(3^{2n}-1)}{(2n)!2n}x^{2n}$.

3. On peut donc prolonger F par continuité en 0 en posant : $F(0) = \ln 3$. F est la somme d'une série entière de rayon de convergence infini, donc elle est de classe C^{∞} sur **R**.
4. Une intégration par parties donne : $F(x) = \dfrac{\sin(6x)}{6x} - \dfrac{\sin(2x)}{2x} + \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_x^{3x}\frac{\sin(2t)}{t^2}dt$. La fonction $t \mapsto \dfrac{\sin(2t)}{t^2}$ est dominée par $\dfrac{1}{t^2}$ donc intégrable sur $[1, +\infty[$. Ainsi, la dernière intégrale tend vers 0 et : $\lim\limits_{+\infty} F = 0$.