Oral ENSSAT 2012

Mathématiques – MLRa 11

PT/TSI

30 minutes de préparation, 25 minutes de présentation. Le candidat traitera obligatoirement les deux parties, dans l'ordre de son choix. Documents et calculatrice interdits.

Partie 1

Dans l'espace vectoriel $E = \mathbf{R}_2[X]$, on pose : $\forall (P,Q) \in E^2, \varphi(P,Q) = \sum_{k=0}^{2} P^{(k)}(0)Q^{(k)}(0)$.

1. Justifier rapidement que φ est un produit scalaire sur *E*.
2. Soit *F* le sous-espace vectoriel engendré par les polynômes $P_1 = X^2 + 1$ et $P_2 = X^2 + X - 2$. Déterminer l'orthogonal de *F*.
3. Calculer le projeté orthogonal de *X* sur *F*.

Partie 2

On pose : $F(x) = \int_x^{3x} \frac{\cos(2t)}{t} dt$.

1. Justifier que *F* est définie sur $\mathbf{R}^*$.
2. On pose : $g(t) = \frac{\cos(2t) - 1}{t}$ pour *t* non nul et $g(0) = 0$. Montrer que *g* est continue sur **R**.
3. On pose : $\forall x \in \mathbf{R}, G(x) = \int_0^x g(t)dt$. Montrer que *G* est développable en série entière et préciser le rayon de convergence.
4. Montrer que, pour tout réel *x* non nul, $F(x)$ peut s'écrire comme somme d'une série entière.

Indications

Partie 1

1. Vérification sans problème
2. $P = a + bX + cX^2$ est dans l'orthogonal de F si et seulement s'il est orthogonal à P_1 et à P_2, d'où : $F^{\perp} = vect\left(X^2 - 12X - 4\right) = vect(P_3)$.
3. On calcule d'abord le projeté de X sur $F^{\perp}$: $p_{F^{\perp}}(X) = \dfrac{1}{\|P_3\|^2}\varphi\left(X, P_3\right)P_3 = -\dfrac{3}{41}P_3$.

On en déduit : $p_F(X) = X - p_{F^{\perp}}(X) = \dfrac{1}{41}\left(3X^2 + 5X - 12\right)$.

Partie 2

1. $F(x)$ est l'intégrale d'une fonction continue sur un segment
2. Un développement limité en 0 prouve la continuité de g.
3. Pour t non nul : $\dfrac{\cos(2t)}{t} = \dfrac{1}{t} + \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \dfrac{2^{2n}t^{2n-1}}{(2n)!}$. g est donc développable en série entière sur **R**. On peut alors intégrer terme à terme sur le segment $[0, x]$: $G(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \dfrac{2^{2n}x^{2n}}{2n(2n)!}$.

Ceci est vrai pour tout x donc le rayon de convergence est infini.

4. On a pour tout x non nul : $F(x) = G(3x) - G(x) + \ln 3$