

Oral ENSSAT 2012

Mathématiques – MLRa3

PT/TSI

30 minutes de préparation, 25 minutes de présentation. Le candidat traitera obligatoirement les deux parties, dans l'ordre de son choix. Documents et calculatrice interdits.

Partie 1

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et p un endomorphisme de E tel que p^2 soit un projecteur.

1. Montrer que si λ est valeur propre de p , alors : $\lambda \in \{0, -1, 1\}$.
2. On suppose de plus que p est diagonalisable. Montrer que : $p^3 = p$.

Partie 2

1. Etudier la nature de la série $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ suivant la valeur du réel α .
2. Lorsque la série précédente converge, comment peut-on obtenir une valeur approchée de sa somme à 10^{-3} près ?
3. On considère la série de terme général : $u_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2n}\right)$. Cette série est-elle absolument convergente ? convergente ?

Indications

Partie 1

1. Soit λ une valeur propre de p et x un vecteur non nul tel que : $p(x) = \lambda x$.
 $p^4 = p^2$ entraîne : $\lambda^4 x = \lambda^2 x$, d'où : $\lambda^4 = \lambda^2$.
2. On suppose p diagonalisable, donc il existe une base dans laquelle la matrice de p est une matrice diagonale D dont les coefficients diagonaux sont 0, 1, -1. Donc $D^3 = D$ et $p^3 = p$.

Partie 2

1 et 2 : questions de cours : Critère spécial des séries alternées

3. $|u_n| \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$ donc la série n'est pas absolument convergente.

Un développement asymptotique donne : $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{(-1)^n}{6n^{3/2}} + o_\infty\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$. La série converge.