



Oral ENSSAT 2012

Mathématiques - Planche PSt1

MP/PC/PSI

30 minutes de préparation, 25 minutes de présentation. Le candidat traitera obligatoirement les deux parties, dans l'ordre de son choix. Documents et calculatrice interdits.

Partie 1

Soit E un $\mathbb{K}$ -e.v. de dimension finie, f et g deux endomorphismes de E . On suppose que

$$E = \text{Im } f + \text{Im } g = \text{Ker } f + \text{Ker } g$$

Démontrer, par un raisonnement sur les dimensions, que ces deux sommes sont directes.

Partie 2

Soit $E = \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$. Pour $f \in E$, on définit

$$N(f) = \sqrt{f^2(0) + \int_0^1 f'(t)^2 dt}$$

1. Démontrer que N est une norme euclidienne sur E .
2. Soit $f \in E$. Démontrer que, pour tout $x \in [0, 1]$

$$f^2(x) = f^2(0) + 2f(0) \int_0^x f'(t) dt + \left(\int_0^x f'(t) dt \right)^2$$

et en déduire que

$$f^2(x) \leq f^2(0) + 2|f(0)| \left(\int_0^1 (f'(t))^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} + \int_0^1 (f'(t))^2 dt$$

3. En déduire que, pour tout f de E , on a $\|f\|_\infty \leq \sqrt{2}N(f)$.
4. Démontrer que les normes (sur E) $\|\cdot\|_\infty$ et N ne sont pas équivalentes.