



## Oral ENSSAT 2012

### Mathématiques – MLRa1

#### PT/TSI

30 minutes de préparation, 25 minutes de présentation. Le candidat traitera obligatoirement les deux parties, dans l'ordre de son choix. Documents et calculatrice interdits.

#### Partie 1

On pose :  $\forall n \geq 2, u_n = \sum_{k=2}^n \frac{\ln k}{k}$ .

1. Étudier le sens de variation de la fonction :  $t \mapsto \frac{\ln t}{t}$ .

En déduire que :  $\forall k \geq 4, \int_k^{k+1} \frac{\ln t}{t} dt \leq \frac{\ln k}{k} \leq \int_{k-1}^k \frac{\ln t}{t} dt$

2. Déduire de la question précédente un encadrement de  $u_n$ , puis un équivalent de  $u_n$  quand  $n$  tend vers l'infini.
3. Déterminer la nature de la série  $\sum \frac{u_n}{n^2}$ .

#### Partie 2

Soit  $E$  un espace vectoriel euclidien dont le produit scalaire est noté  $(\cdot | \cdot)$ .

1. Montrer que si  $p$  est un projecteur orthogonal, alors  $p$  est un endomorphisme symétrique et :  $\forall \vec{x} \in E, \|p(\vec{x})\|^2 = (p(\vec{x}) | \vec{x})$ .
2. Réciproquement, soit  $f$  un endomorphisme symétrique tel que :  $\forall \vec{x} \in E, \|f(\vec{x})\|^2 = (f(\vec{x}) | \vec{x})$ . Montrer que  $f$  est un projecteur orthogonal.