



Oral ENSSAT 2012

Mathématiques - Planche MPr12

MP/PC/PSI/PT/TSI

30 minutes de préparation, 25 minutes de présentation. Le candidat traitera obligatoirement les deux parties, dans l'ordre de son choix. Documents et calculatrice interdits.

Partie 1.

On considère la série entière $\sum_{n>0} \frac{\sin(n)}{n} x^n$.

1. Montrer que pour tout $x \in]-1, 1[$, la série converge.
2. En considérant la série dérivée, prouver que son rayon de convergence R vaut 1.
3. Calculer sa somme notée $f(x)$ pour $x \in]-1, 1[$.

Partie 2.

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ et pour tout réel θ la

quantité :

$$D_n(\theta) = \det(M + 2 \cos(\theta) I_n)$$

1. Déterminer une relation linéaire entre $D_n(\theta)$, $D_{n+1}(\theta)$ et $D_{n+2}(\theta)$ pour $n \geq 2$.
2. En déduire une expression simplifiée de $D_n(\theta)$.