Oral ENSSAT 2012

Mathématiques – GNo1

MP/PC/PSI

30 minutes de préparation, 25 minutes de présentation.
Le candidat traitera obligatoirement les deux parties, dans l'ordre de son choix.
Documents et calculatrice interdits.

Exercice 1.
Soit l'équation différentielle : $y'' + y.e^{i.t} = 0$.

a. Enoncer le théorème donnant la structure de l'ensemble des fonctions à valeurs complexes, solutions sur $\mathbb{R}$ (ou sur tout intervalle de $\mathbb{R}$) de cette équation.
b. Montrer qu'une solution sur $\mathbb{R}$ est nécessairement de classe C^{∞} sur $\mathbb{R}$.
c. Déterminer à l'aide de séries de Fourier la fonction y_0 2π-périodique, solution de cette équation sur $\mathbb{R}$ et valant 1 en 0 (on pourra travailler par analyse-synthèse).
d. Expliquer comment on pourrait déterminer, en fonction de y_0, l'ensemble des solutions de cette équation sur un intervalle où y_0 ne s'annule pas.

Exercice 2.
Soient p et q deux projecteurs d'un **K**-espace vectoriel E qui commutent.

a. Montrer que poq est un projecteur de E.
b. Montrer que : ker(poq) = ker(p) + ker(q).
c. Décrire Im(poq).