



Oral ENSSAT 2012

Mathématiques - Planche PBo9

MP/PC/PSI/PT/TSI

30 minutes de préparation, 25 minutes de présentation. Le candidat traitera obligatoirement les deux parties, dans l'ordre de son choix. Documents et calculatrice interdits.

Partie 1.

1. Montrer que l'application $(P, Q) \in \mathbb{R}_{2n}[X] \mapsto \langle P, Q \rangle = \int_1^4 P(t)Q(t) dt$ est un produit scalaire dans $\mathbb{R}_{2n}[X]$.
2. Montrer que $H = \left\{ P \in \mathbb{R}_{2n}[X], \int_1^4 P(t) dt = 0 \right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_{2n}[X]$. Quelle est sa dimension ?
3. Déterminer H^\perp .

Partie 2. Soit F la fonction définie par : $F(x) = \int_0^1 \frac{\ln(1+xt)}{1+t^2} dt$.

1. Montrer que F est bien définie et de classe C^1 sur $]1, +\infty[$ et calculer $F'(x)$.
2. Démontrer que $\int_0^1 \frac{\ln(1+xt)}{1+t^2} dt = \frac{\ln 2}{2} \arctan x + \frac{\pi}{8} \ln(1+x^2) - \int_0^x \frac{\ln(1+t)}{1+t^2} dt$.
3. En déduire la valeur de $\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{1+t^2} dt$.