



Oral ENSSAT 2012

Mathématiques - EBi12

PT/TSI

30 minutes de préparation, 25 minutes de présentation. Le candidat traitera obligatoirement les deux parties, dans l'ordre de son choix. Documents et calculatrice interdits.

Exercice n°1.

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}$ est diagonalisable. Déterminer une matrice diagonale D et une matrice orthogonale P tel que $A = PDP^{-1}$.

2. On munit le plan d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) . Déterminer l'équation réduite de l'ensemble d'équation :

$$x^2 + y^2 + 2\alpha xy = 1$$

3. Déterminer la nature de cet ensemble selon α .

Exercice n°2.

Soit a un réel strictement positif. On définit la fonction f par :

$$f(x) = \ln(\sqrt{1 + 2x \operatorname{ch} a + x^2})$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f .

2. Montrer que le polynôme $1 + 2 \operatorname{ch} a X + X^2$ peut s'écrire sous la forme $(1 + \beta X)(1 + \gamma X)$ avec β et γ des réels.

3. Déterminer le développement en série entière de la fonction f au voisinage de 0 et préciser le rayon de convergence du développement obtenu.