



Oral ENSSAT 2013

Mathématiques - EBi6

MP/PC/PSI

30 minutes de préparation, 25 minutes de présentation. Le candidat traitera obligatoirement les deux parties, dans l'ordre de son choix. Documents et calculatrice interdits.

Exercice n°1.

Soit E un espace préhilbertien réel.

Une projection orthogonale de E est-elle un endomorphisme orthogonal ?

Exercice n°2.

On définit $f(x) = \int_0^\pi \ln(x^2 - 2x \cos \theta + 1) d\theta$.

1. Montrer que la fonction f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.
2. Etudier la parité de f . On pourra utiliser le changement de variable $\varphi = \pi - \theta$.
3. Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1, 1\}$, exprimer $f\left(\frac{1}{x}\right)$ en fonction de $f(x)$.
4. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\} : f(x^2) = 2f(x)$. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, f(x) = \frac{1}{2^n} f(x^{2^n})$.
5. Justifier l'encadrement pour $x \in]0, 1[:$

$$2\pi \ln(1 - x) \leq f(x) \leq 2\pi \ln(1 + x)$$

6. En utilisant les résultats précédents, simplifier l'expression de f .