



Oral ENSSAT 2013

Mathématiques – MLRa4

MP/PC/PSI

30 minutes de préparation, 25 minutes de présentation. Le candidat traitera obligatoirement les deux parties, dans l'ordre de son choix. Documents et calculatrice interdits.

Partie 1

On pose : $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \arctan \frac{x}{n}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f .
2. Montrer que f est de classe C^1 sur son ensemble de définition.
3. Etudier la limite en $+\infty$ de f' .

Partie 2

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E .

On suppose que : $\ker f \oplus \text{Im } f = E$.

1. Montrer que $F = \text{Im } f$ est stable par f . On note f_F l'endomorphisme induit par f sur F .
2. Montrer que f est diagonalisable si et seulement si f_F l'est.

3. Application : Etudier la diagonalisabilité de la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \vdots \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ dans

$M_n(\mathbf{R})$.