

Oral ENSSAT 2014

Mathématiques - EBi1

MP

30 minutes de préparation, 25 minutes de présentation. Le candidat traitera obligatoirement les deux parties, dans l'ordre de son choix. Documents et calculatrice interdits.

Exercice n°1.

Soit f un endomorphisme de \mathbb{R}^n tel que $f^3 + f^2 + f = 0$.

1. A quoi est égale $\text{Ker}(f^2 + f + \text{Id}_{\mathbb{R}^n}) \cap \text{Ker } f$?
2. Montrer que $\text{Im } f = \text{Ker}(f^2 + f + \text{Id}_{\mathbb{R}^n})$ puis que $\mathbb{R}^n = \text{Ker } f \oplus \text{Im } f$.
3. Soit g l'endomorphisme induit par f à $\text{Im } f$. Que dire du degré du polynôme caractéristique de g ?
4. Montrer que le spectre réel de g ne contient pas 0 et en déduire que le rang de f est pair.

Exercice n°2.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \int_0^1 \frac{u^n}{1+u^2} du$.

Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ puis calculer sa somme sur $] -R, R[$.