

Oral ENSSAT 2014

Mathématiques - EBI1bis

PC/PSI/PT

*30 minutes de préparation, 25 minutes de présentation. Le candidat traitera obligatoirement les deux parties, dans l'ordre de son choix. Documents et calculatrice interdits.*

**Exercice n°1.**

Soit  $f$  un endomorphisme de  $\mathbb{R}^n$  tel que  $f^3 + f^2 + f = 0$ .

1. A quoi est égale  $\text{Ker}(f^2 + f + \text{Id}_{\mathbb{R}^n}) \cap \text{Ker } f$  ?
2. Montrer que  $\text{Im } f = \text{Ker}(f^2 + f + \text{Id}_{\mathbb{R}^n})$  puis que  $\mathbb{R}^n = \text{Ker } f \oplus \text{Im } f$ .
3. Soit  $g$  l'endomorphisme induit par  $f$  à  $\text{Im } f$ . Que dire du degré du polynôme caractéristique de  $g$  ?
4. Montrer que le spectre réel de  $g$  ne contient pas 0 et en déduire que le rang de  $f$  est pair.

**Exercice n°2.**

Montrer que la série  $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n \cos nx}{2^n}$  avec  $x \in \mathbb{R}$  converge et calculer sa somme.