Oral ENSSAT 2014

Mathématiques – GNo3

MP/PC/PSI

30 minutes de préparation, 25 minutes de présentation.
Le candidat traitera obligatoirement les deux parties, dans l'ordre de son choix.
Documents et calculatrice interdits.

Exercice 1.

On note : $E = C^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$.

Pour : $f \in E$, $\lambda \in \mathbb{R}$, on définit $T_\lambda(f)$ par : $\forall\, x \in \mathbb{R}^+$, $T_\lambda(f)(x) = \int_0^x e^{\lambda.(t-x)}.f(t).dt$.

a. En transformant l'écriture de $T_\lambda(f)$ en un produit de deux fonctions de x, montrer que : $\forall\, f \in E$, $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}$, $T_\lambda(f) \in E$.
b. Montrer qu'on définit ainsi un endomorphisme de E.
   Est-ce un automorphisme de E ?
c. Trouver une équation différentielle non triviale du premier ordre vérifiée par $T_\lambda(f)$.
d. Montrer que : $\forall\, (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$, $T_\mu - T_\lambda = (\mu - \lambda).T_\lambda o T_\mu$.
e. Les opérateurs T_λ commutent-ils entre eux ?

Exercice 2.

Soit : $\mathbf{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et soit : $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, triangulaire supérieure.

a. A quelle condition simple A est-elle inversible ?
b. Montrer que dans ce cas, A^{-1} est également une matrice triangulaire supérieure.