

Oral ENSSAT 2014

Mathématiques - Planche LBe7

MP/PC/PSI

30 minutes de préparation, 25 minutes de présentation. Le candidat traitera obligatoirement les deux parties, dans l'ordre de son choix. Documents et calculatrice interdits.

Partie 1.

Soient un entier $n \geq 1$ et des éléments A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

1. Montrer $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$, où Tr désigne la trace.
2. Montrer que deux matrices semblables ont même trace.
3. Soient a un réel et C et D les éléments de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ suivants :

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} ; D = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

Les matrices C et D sont-elles semblables ?

Partie 2.

1. Montrer que pour tout réel t , $e^t \geq 1 + t$.
2. Etudier les éventuelles solutions maximales du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = |x + e^t|, \\ x(0) = -1, \\ \frac{dx}{dt}(0) = -1 ; \end{cases}$$

c'est-à-dire les applications définies au voisinage de 0 sur un intervalle I , à valeurs réelles, deux fois dérivables telles que pour tout élément t de I , $\varphi''(t) = |\varphi(t) + e^t|$, vérifiant $\varphi(0) = \varphi'(0) = -1$ et qui ne sont pas prolongeables en une solution.