

Oral ENSSAT 2014

Mathématiques - Planche MPr2

MP/PC/PSI

*30 minutes de préparation, 25 minutes de présentation. Le candidat traitera obligatoirement les deux parties, dans l'ordre de son choix. Documents et calculatrice interdits.*

**Partie 1.**

Soit  $I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(\alpha x)}{e^x - 1} dx$  avec  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

1. Justifier l'existence de  $I(\alpha)$ .
2. Établir la convergence et calculer  $\sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{Im} \left( \int_0^{+\infty} e^{(-n+i\alpha)x} dx \right)$ .
3. En déduire que :  $I(\alpha) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha}{n^2 + \alpha^2}$ .

**Partie 2.**

Soit  $f$  un endomorphisme d'un espace vectoriel  $E$  de dimension trois vérifiant  $f^2 = f^3$  et  $\dim \operatorname{Ker} (f - \operatorname{id}_E) = 1$ .

1. Montrer que  $\operatorname{rg} (f) \in \{1, 2\}$ .
2. Déterminer une base de  $E$  pour laquelle la matrice de  $f$  est triangulaire supérieure. On explicitera une telle matrice.