

Mathématiques – MLRa5

PC/PSI

30 minutes de préparation, 25 minutes de présentation. Le candidat traitera obligatoirement les deux parties, dans l'ordre de son choix. Documents et calculatrice interdits.

Partie 1

Soit : $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t} + t^n} dt$. Déterminer les entiers n dans \mathbf{N} tels que cette intégrale existe. Etudier la limite de I_n quand n tend vers l'infini.

Partie 2

- 1) Soit la matrice : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. A est-elle diagonalisable ?
- 2) Soit $X \in M_3(\mathbf{R})$ telle que : $X^5 - X^3 + X = A$. Montrer que X commute avec A .
- 3) Déterminer toutes les matrices $X \in M_3(\mathbf{R})$ telles que : $X^5 - X^3 + X = A$.