

#### Mathématiques – MLRa5

#### PT/TSI

30 minutes de préparation, 25 minutes de présentation. Le candidat traitera obligatoirement les deux parties, dans l'ordre de son choix. Documents et calculatrice interdits.

#### Partie 1

Soit :  $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t} + t^n} dt$ . Déterminer les entiers  $n$  dans  $\mathbf{N}$  tels que cette intégrale existe. Etudier la limite de  $I_n$  quand  $n$  tend vers l'infini.

#### Partie 2

- 1) Soit la matrice :  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ .  $A$  est-elle diagonalisable ?
- 2) Montrer que l'ensemble des matrices  $X \in M_3(\mathbf{R})$  qui commutent avec  $A$  est un sous-espace vectoriel de  $M_3(\mathbf{R})$ .
- 3) Soit  $X \in M_3(\mathbf{R})$  telle que :  $X^3 = A$ . Montrer que  $X$  commute avec  $A$ .
- 4) Déterminer toutes les matrices  $X \in M_3(\mathbf{R})$  telles que :  $X^3 = A$ .