Oral ENSSAT 2014

Mathématiques - Planche PSt12

MP/PC/PSI

30 minutes de préparation, 25 minutes de présentation. Le candidat traitera obligatoirement les deux parties, dans l'ordre de son choix. Documents et calculatrice interdits.

Partie 1

Soit $k \in \mathbb{N}$. On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est homogène de degré k si

$$\forall (t, x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \quad f(tx_1, \ldots, tx_n) = t^k f(x_1, \ldots, x_n) \tag{1}$$

1. Donner un exemple de fonction homogène de degré k.
2. Soit f une fonction homogène de degré k de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$. Démontrer l'égalité suivante, dite *identité d'Euler* :

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1, \ldots, x_n) = kf(x_1, \ldots, x_n) \tag{2}$$

3. On souhaite étudier la réciproque de (1) $\Rightarrow$ (2) dans la cas particulier $n = 2$ et $k = 0$. Plus précisément, on cherche à caractériser les fonctions f de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$ vérifiant l'identité d'Euler pour $k = 0$:

$$\forall (x, y) \in \Omega \quad x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \tag{3}$$

Pour simplifier, on suppose que $\Omega =]0, +\infty[\times \mathbb{R}$. Déterminer les fonctions f vérifiant (3) par passage en coordonnées polaires. Commenter.

Partie 2

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique. On suppose que l'on a $A^3 = 2A^2 - A + 2I_n$. Calculer A.