Oral ENSSAT 2014

Mathématiques - Planche PSt16

MP

30 minutes de préparation, 25 minutes de présentation. Le candidat traitera obligatoirement les deux parties, dans l'ordre de son choix. Documents et calculatrice interdits.

Partie 1

Définition du polynôme minimal d'un endomorphisme d'un e.v. de dimension finie.

Partie 2

1. On considère l'équation différentielle

$$y'(x) = -2xy^2(x) \tag{1}$$

   (a) Justifier que si une solution $x \mapsto y(x)$ de (1) s'annule en un point x_0 de son intervalle I de définition, alors y est la fonction nulle.

   (b) Déterminer les solutions maximales de (1), tracer les courbes intégrales. Que pouvait-on prévoir sans calcul au sujet du sens de variation des solutions maximales et au sujet de leur comportement aux extrémités de leurs intervalles de définition ?

2. On considère l'équation différentielle

$$y'(x) = \frac{3}{2}\, y^{1/3}(x) \tag{2}$$

   (a) Déterminer les solutions y de (2) ne s'annulant pas sur leur intervalle I de définition.

   (b) On choisit I le plus grand possible. Démontrer que y est prolongeable par continuité et dérivabilité en l'extrémité gauche de I et tracer les courbes intégrales.

   (c) En déduire que pour tout réel x_0, le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = \frac{3}{2}\, y^{1/3}(x) \\ y(x_0) = 0 \end{cases} \tag{3}$$

   possède une infinité de solutions. Est-ce que ceci contredit le théorème d'existence et d'unicité d'une solution du problème de Cauchy ?