

Oral ENSSAT 2014

Mathématiques - Planche PSt16

PC/PSI/PT

30 minutes de préparation, 25 minutes de présentation. Le candidat traitera obligatoirement les deux parties, dans l'ordre de son choix. Documents et calculatrice interdits.

Partie 1

1. On considère l'équation différentielle

$$y'(x) = -2xy^2(x) \quad (1)$$

- (a) Justifier que par tout point $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ il passe une unique courbe intégrale (maximale).
- (b) Justifier que si une solution y de (1) s'annule en un point x_0 de son intervalle I de définition, alors y est la fonction nulle.
- (c) Déterminer les solutions maximales de (1) et tracer les courbes intégrales.

Indication. Chercher la solution maximale telle que $y(x_0) = y_0$ et faire une étude de cas.

Partie 2

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -8 \\ -4 & 7 & -4 \\ -8 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

- 1. Déterminer les valeurs propres de A . La matrice A est-elle inversible?
- 2. Justifier de deux façons (à l'aide d'un résultat de cours, puis par le calcul) que A est diagonalisable et déterminer P inversible et D diagonale telles que $A = PDP^{-1}$.
- 3. Soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 représenté dans la base canonique de \mathbb{R}^3 par la matrice $B = \frac{1}{9}A$. Justifier que f est un endomorphisme symétrique. Presque sans calcul, donner $\det f$, les valeurs propres et les vecteurs propres de f .
- 4. Justifier que f est un endomorphisme orthogonal (*i.e.* une isométrie de \mathbb{R}^3). Identifier f géométriquement.