Oral ENSSAT 2010

Mathématiques

Planche 3 - MP/PC/PSI

30 minutes de préparation, 25 minutes de présentation. Le candidat traitera obligatoirement les deux parties, dans l'ordre de son choix. Documents et calculatrice interdits.

Partie 1

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, avec $n \geqslant 2$. On suppose que $A^3 + 3A^2 + 7A = 0$. Montrer que si A est symétrique alors $A = 0$.

Partie 2

Soit (a_n) définie par $a_0 = a_1 = a_2 = 1$ et

$$\forall n \geqslant 2 \quad a_{n+1} = a_n - \frac{a_{n-2}}{2(n+1)}$$

1. Montrer par récurrence que (a_n) est décroissante, que (na_n) est croissante, et que $a_n \geqslant 0$.
2. Déterminer le rayon de convergence de $(\sum a_n x^n)$.
3. Soit f la somme de la série : $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

   Trouver une équation différentielle du premier ordre vérifiée par la fonction f. En déduire f.

Indications et conseils.

Partie 2 :

1) Raisonner par récurrence « globalement » : prouver

$$(H_n) \qquad a_{n+1} \leqslant a_n \text{ et } (n+1)a_{n+1} \geqslant na_n \geqslant 0$$

2) Utiliser 1), on trouve $R = 1$.

3) On trouvera une équation du premier ordre linéaire.