



Oral ENSSAT 2010

Mathématiques

Planche 4 - MP/PC/PSI

*30 minutes de préparation, 25 minutes de présentation. Le candidat traitera obligatoirement les deux parties, dans l'ordre de son choix. Documents et calculatrice interdits.*

**Partie 1**

Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Étudier la nature des séries  $\sum \frac{(\ln n)^{2010}}{n^\alpha}$  et  $\sum \frac{1}{n \ln n}$ .

**Partie 2**

Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -ev de dimension  $n \geq 2$  et soit  $f \in \mathcal{L}(E)$ . On suppose qu'il existe un vecteur  $x_0$  de  $E$  tel que  $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$  soit une base de  $E$ .

Soit  $g \in \mathcal{L}(E)$ . Montrer que  $f \circ g = g \circ f$  si et seulement si il existe un polynôme  $P$  de  $\mathbb{R}[X]$  tel que  $g = P(f)$ .

## Indications et conseils.

Partie 1 : Pour la première série, comparaison à une série de Riemann (par croissance comparée). Pour la deuxième, comparaison à une intégrale qui se laisse calculer.

Partie 2 : Pour le sens direct, raisonner par analyse et synthèse :  $g(x_0)$  s'écrit sur la base de l'énoncé, ce qui permet de construire un polynôme « candidat », puis on utilise le fait que deux endomorphismes sont égaux s'ils coïncident sur une base.