Oral ENSSAT 2010

Mathématiques

Planche 5 - MP/PC/PSI

30 minutes de préparation, 25 minutes de présentation. Le candidat traitera obligatoirement les deux parties, dans l'ordre de son choix. Documents et calculatrice interdits.

Exercice 1

On pose $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$.

On définit F et G sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt$ et $G(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-t^2} dt$.

1) Montrer que I existe .

2) Montrer que la fonction $F + G^2$ est constante sur $\mathbb{R}$.

3) Déterminer la limite de $F(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

4) En déduire la valeur de I.

Exercice 2

On considère $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire canonique et orienté.

Déterminer la nature des endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ vérifiant :

$$\forall (u,v) \in (\mathbb{R}^3)^2 \quad f(u) \wedge f(v) = f(u \wedge v)$$

Indications et conseils.

Exercice 1 :

2) Montrer que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et calculer $(F+G^2)'$.

3) Majorer $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-x^2t^2}}{1+t^2}dt$ par une constante.

4) On trouve $I = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Exercice 2 :

Considérer une base orthonormée directe (i, j, k) de $\mathbb{R}^3$, et montrer que son image par f est une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^3$, sauf lorsque les 3 images sont nulles. On trouve donc l'application nulle et les rotations.