

Oral ENSSAT 2010

Mathématiques

Planche 6 - MP/PC/PSI

*30 minutes de préparation, 25 minutes de présentation. Le candidat traitera obligatoirement les deux parties, dans l'ordre de son choix. Documents et calculatrice interdits.*

**Exercice 1**

1. (a) Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}^*, (1 + \frac{1}{n})^n \leq e$ .  
(b) Soit  $f : [1, e[ \longrightarrow \mathbb{R}$  continue par morceaux et intégrable sur  $[1, e[$ . Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^{(1+\frac{1}{n})^n} x^{\frac{1}{n}} f(x) dx = \int_1^e f(x) dx$ .
2. En déduire la limite de  $\int_1^{(1+\frac{1}{n})^n} x^{\frac{1}{n}} \ln x dx$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

**Exercice 2**

Soit  $\alpha \in \mathbb{C}$  et soit  $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , où  $a_{i,j} = \alpha^{i+j-2}$ .

1. Si  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $A$  est-elle diagonalisable ?
2. Déterminer le rang de  $A$  et en déduire ses valeurs propres.
3. À quelle condition sur  $\alpha$  la matrice  $A$  est-elle diagonalisable ?

## Indications et conseils.

Exercice 1 :

1) Considérer la fonction définie par  $\begin{cases} f_n(x) = x^{\frac{1}{n}} f(x) & \text{si } x \in [1, (1 + \frac{1}{n})^n[ \\ f_n(x) = 0 & \text{si } x \in [(1 + \frac{1}{n})^n, e[ \end{cases}$

2) On trouve  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^{(1+\frac{1}{n})^n} x^{\frac{1}{n}} \ln x dx = 1$ .

Exercice 2 :

2) En notant  $C_1, C_2, \dots, C_n$  les colonnes de  $A$ , que remarque-t-on ?

Appliquer le théorème du rang à l'endomorphisme canoniquement associé à  $A$ .

Écrire le polynôme caractéristique de  $A$ , que peut-on en déduire pour la trace de  $A$  ?

On trouve  $\text{Sp}(A) = \left\{ 0, \sum_{k=0}^{n-1} \alpha^{2k} \right\}$  ou  $\{0\}$ .

3) On trouve que  $A$  est diagonalisable ssi  $\alpha \notin \mathcal{U}_{2n} \setminus \{-1, 1\}$ , où  $\mathcal{U}_{2n}$  est l'ensemble des racines  $2n$ -èmes de l'unité.